有限グラフのZeta函数とP-進群の表現について(整数論と保型形式)

橋本, 喜一朗

数理解析研究所講究録
689巻 1989年 128-147

有限グラフのZeta函数とp-進群の表現について

早大・理工　橋本喜一朗
(Ki-ichiro Hashimoto)

§0 序

1987の同研究集会で，筆者と堀(東大・理)はp-進体K上のK-rank$=1$なる代数群Gの離散群Γに対する，Selberg-Ihara型のZeta函数についての結果を報告した([H-H 1])が，本稿はその続篇である。前回の結果に於てZeta函数$Z_\Gamma(u;\rho)$の2つの有理的表示が非対称的であったことの解釈等，いくつかの関連する問題が満足できる形で解決し，更に主結果を任意の有限グラフに対して拡張するZeta函数の第3の表示式が得られた。この表示式(定理3参照)はZeta函数をグラフの辺の上の2つの対応(correspondence) T_1, T_2の積の特性多項式として把えるもので，有限体上の代数的多様体の合同ゼータ函数の場合と極めて類似している。また，この表示式とp-進群の表現に関するA. Borel [Bo]の結果を組合せ

ると、$L^2(G/\Gamma)$ のスペクトル分解に対する $Z_\Gamma(u;\rho)$ の役割が素晴しく明快に記述される（定理4参照）。最後に、半正則型の Zeta 函数の理論を展開できる群 G の category を公理的に記述する結果についても言及する。

§1. $\mathfrak{p}$-進群の Zeta 函数（復習）

K を $\mathfrak{p}$-進体，G を K 上の semi-simple な代数群で $K\text{-rank}(G)=1$ とする。更に G は affine Tits 系 (G,B,N,S) を有するとする（例：$G=$ simply connected group）。$\Gamma < G$ を torsion のない離散部分群で $G/\Gamma=$ compact とし，$\rho:\Gamma\to U(n)$ を n 次ユニタリ表現とするとき，

$$Z_\Gamma(u;\rho) := \prod_{\{\gamma\}_\Gamma} \det\left[I_n - \rho(\gamma)\, u^{\deg\{\gamma\}_\Gamma}\right]^{-1}$$

で (Γ,ρ) の Ihara 型 Zeta 函数が定義される。但し，積は Γ の primitive な共役類 $\{\gamma\}_\Gamma$ の全体 $\mathcal{P}(\Gamma)$（＝無限集合）上にわたり，$\deg\{\gamma\}_\Gamma := \min_{x\in G} \ell(x^{-1}\gamma x)$。ここで $\ell: G\to \mathbb{N}\cup\{0\}$ は次の様に定まる函数である：$S=\{s_1,s_2\}$ とするとき，$U_i := B\cup Bs_iB$ $(i=1,2)$ は G の max. compact subgroup の共役類の完全代表系をなす。今，$U=U_1$ を1つ選び $x\in G$ に対して $\ell(x)=\ell \iff x\in U(s_1s_2)^\ell U$

とおく。次の結果は $G = SL_2(K)$ に対する伊原[Ih-1]の一般化である：

<u>定理 1.</u>（橋本-堀：[H-H 1,2]）$Z_\Gamma(u;\rho)$ は次の様な有理函数である：

$$Z_\Gamma(u;\rho)=\left\{\begin{array}{l}(1-u)^{n(r-1)}(1+q_2u)^{n(h_2-h_1)}\\ \times\det\left[I_{nh_1}-(A_{1,\rho}-q_2+1)u+q_1q_2u^2\right]\end{array}\right\}^{-1}$$

記号：$h_i := \#(U_i\backslash G/\Gamma)$．行列 $A_{1,\rho}$ は Hecke 作用素 $T(p)$ の Brandt 表現による像で，次の如く定義される。$\{x_i\ (1\le i\le h_1)\}$ を $U\backslash G/\Gamma$ の完全代表系とするとき

$$A_{1,\rho} := (a_{ij}) \qquad a_{ij} = \sum_{\gamma\in\Gamma\cap x_i^{-1}G_1x_j}\rho(\gamma)$$

但し，$G_1 := Us_2U = \{x\in G\ ;\ \ell(x)=1\}$。

$$q_i := \#(B\backslash Bs_iB) \qquad r := q_1h_1-h_2+1 = q_2h_2-h_1+1$$

（注-1）q_1, q_2 は $p^{巾}$ で一般には $q_1\ne q_2$。Γ は上記仮定の下で free group となり $r=\mathrm{rank}(\Gamma)$ となる。また，上では $U=U_1$ としたが，U_2 を選んでも同じ $Z_\Gamma(u;\rho)$ が得られることがわかるので，$Z_\Gamma(u;\rho)$ のもう1つの表示式が h_1, h_2 や q_1, q_2 を入換えて得られる（$A_{1,\rho}$ も変る！）が，上式の非対称性からこれらの2式は自明でない関係式を

与へている様に見える。また，上式と Garland [Ga] の結果と合せると，$\xi = 1\!\!1$ のとき，次のことがわかる。

$r = (1-u)^{-1}$ の重複度 in $Z_\Gamma(u; 1\!\!1)$

$= L^2(G/\Gamma)$ に含まれる Steinberg 表現の重複度

これも [Ih-1] の一般化である。

<u>問題</u>: ① 非対称性の解釈を与へよ

② $Z_\Gamma(u;\xi)$ の $(1-u)$ 以外の因子の意味について上と同様の解釈を与へよ

§2. <u>有限グラフの Zeta 函数</u>

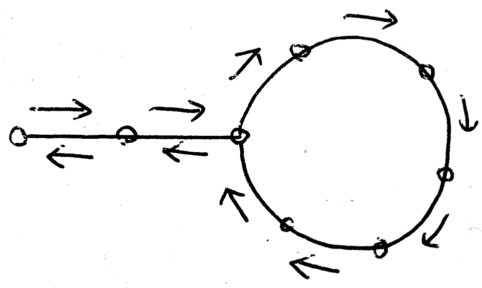
定義. $X = (VX, EX, \varepsilon, \tau)$ が非有向グラフであるとは VX (= 頂点の集合), EX = (辺の集合) その間の写像 $\varepsilon : EX \longrightarrow VX \times VX$, $\varepsilon(y) = (o(y), t(y))$ & $\tau : EX \longrightarrow EX$ s.t $\tau \circ \tau = id$ $\tau(y) = \bar{y}$ $(\neq y)$ の 4つ組のことをいう。

以下では X = 有限グラフとする i.e, $\# VX < \infty$, $\# EX < \infty$。対 $e = \{y, \bar{y}\} \in EX/\langle\tau\rangle = \underline{EX}$ を向きのない辺という。$P \in VX$ に対して $k(P) = \#\{y \in EX ; o(y) = P\}$ を P の価といい，$q(P)+1$ とも書く。また，$\exists\, y \in EX$ s.t. $o(y) = P$, $t(y) = Q$ なる 2頂点 P, Q は隣接する (adjacent) といい，$VX = V_1 \sqcup V_2$ (disjoint) s.t. $\forall P, Q \in V_1$ (resp. V_2) は隣接しない，となるとき X は 2部グラフ (

bipartite）と呼ばれる。X 上の path C とは，向きの付いた辺の列 $(y_1, y_2, \cdots, y_\ell)$ で $o(y_{i+1}) = t(y_i)$ $\forall i$ なるものをいう。次の用語をもうける：

$$\begin{cases} C=(y_1,\cdots,y_\ell) \text{ が proper} \iff y_{i+1} \neq \bar{y}_i \quad (\forall i=1,2,\cdots,\ell-1) \\ \qquad '' \qquad \text{closed} \iff o(y_1)=t(y_\ell) \\ \qquad '' \qquad \text{reduced} \iff \text{closed} \ \& \ C, C^2 = \text{proper} \end{cases}$$

例：右図の様な path C は proper かつ closed であるが reduced でない。



$$\mathcal{C}^{red}_\ell(X) := \left\{ C;\ \begin{matrix} C=\text{reduced} \\ |C| = 長さ = \ell \end{matrix} \right\}$$

とおき，

$$N_\ell(X) = N_\ell = \# \mathcal{C}^{red}_\ell(X) \qquad (< \infty \Leftarrow X : \text{finite})$$

とおく。X が S^1 と homotopic なら $N_\ell(X)$ はつねに有界かつ周期的になるが，その他の場合には $N_\ell \to +\infty$ $(\ell \to \infty)$。以下後者のみを考えよう。我々の Zeta 函数は次の様に定義される（有限体上の variety の合同ゼータの類似!!）

$$Z_X(u) := \exp\left\{ \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{N_\ell(X)}{\ell} u^\ell \right\}$$

合同ゼータの時の様に，$Z_X(u)$ は有理函数になることが

期待される。実際そうなることが我々の結果である：

定理2　X は有限非有向グラフで，$\#EX = 2m$，$VX = \{P_1, \cdots, P_h\}$ とし，P_i の価を $q_i + 1$ とすると

1)　$\exists\, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{2m} \in \mathbb{C}$ （代数的整数） s.t.

$$N_\ell(X) = \alpha_1^\ell + \alpha_2^\ell + \cdots + \alpha_{2m}^\ell$$

即ち　$$Z_X(u) = \left\{ \prod_{j=1}^{2m} (1 - \alpha_j u) \right\}^{-1}$$

2)　$$\alpha_1 \cdots \alpha_{2m} = (-1)^h q_1 \cdots q_h$$

3)　$$\#\{j\,;\, \alpha_j = 1\} \;(= (1-u)^{-1} \text{の重複度})$$
$$= \dim_{\mathbb{C}} H_1(X, \mathbb{C}) \qquad (X \not\sim S^1 \text{ とする 以下も同じ})$$

4)　$$\#\{j\,;\, \alpha_j = -1\} \;(= (1+u)^{-1} \text{の重複度})$$
$$= \begin{cases} \dim_{\mathbb{C}} H_1(X, \mathbb{C}) & \cdots\ X = \text{bipartite} \\ \dim_{\mathbb{C}} H_1(X, \mathbb{C}) - 1 & \cdots\ X \neq \ \text{〃} \end{cases}$$

X に正則性を仮定すると，$Z_X(u)$ は更に合同ゼータ函数に近くなる。次の結果は伊原 [Ih-1] の主結果のグラフによる解釈（一般化）で，Serre の指摘によるものを具体化したものである（砂田 [Su-1,2] を参照）。

<u>定理 2*</u> 上記に於て $X=$ regular ($\Leftrightarrow {}^\forall q_j = q > 1$) とすると、$\exists !\, j$ s.t. $\alpha_j = q$。更に $\{\alpha_j \neq \pm 1, q\} = \bigsqcup_{j=1}^{h-1} \{\alpha_j, \alpha_j'\}$ と分解されて、$\alpha_j \alpha_j' = q$, $\alpha_j + \alpha_j' = a_j \in \mathbb{R}$ となる。即ち、

$$Z_X(u) = \left\{ (1-u)^r (1+u)^{r-1} (1-qu) \prod_{j=1}^{h-1} (1 - a_j u + q u^2) \right\}^{-1}$$

(注-2) 上記の表示中の $\prod_{j=1}^{h-1}(1-a_j u + q u^2)$ の部分が、$\mathbb{F}_q$ 上の Curve の合同ゼータの分子と同じ形をしている。実際、グラフ X が $G = SL_2(\mathbb{Q}_p)$ の離散群で数論的なものから得られる場合は、この因子はある level N の modular curve $X_0(N) \otimes \mathbb{F}_q$ ($q = p \nmid N$) の合同ゼータの分子と一致している (cf. [Ih-2])。そこで次の様な問題が生ずる：

<u>問題</u>: $\mathbb{F}_q$ 上の curve C に対して有限 graph X を対応させて、両者のゼータ函数の主要部が一致する様にできるだろうか？

次に X が 2部グラフで反正則とする。即ち、$VX = V_1 \sqcup V_2$ に於て V_i $(i=1,2)$ の各頂点は一定の価 q_i をもつとする。$\# V_1 = h_1$, $\# V_2 = h_2$ とすると、自明な関係式 $(1+q_1)h_1 = (1+q_2)h_2$ が成立する。今、$q_1 \geqq q_2$ と仮定しておく。次の結果は §1 の定理1を含む (G の Tits building を Γ で割って X が得られる場合である)。

<u>定理2**</u>　X は上記の如く価 (q_1+1, q_2+1) の反正則有限グラフとすると，α_i $(1\le i\le 2m)$ を適当に並び換えると，　$\alpha_{j+m} = -\alpha_j$　$(\forall j=1,\cdots,m)$　とできる。更に，

$$\{\alpha_1^2, \cdots, \alpha_m^2\} = \{1\ (r\text{回}),\ q_1q_2,\ -q_2\ (h_2-h_1\text{回});\ \beta_j, \beta_j'\}\quad (1\le j\le h_1-1)$$

と分解できて

$$\beta_j\cdot\beta_j' = q_1q_2\ ,\quad \beta_j+\beta_j' = b_j \in \mathbb{R}$$

となる。即ち，

$$Z_X(u) = \left\{ \begin{array}{c} (1-u^2)^r(1+q_2u^2)^{h_2-h_1}(1-q_1q_2u^2) \\ \times \prod_{j=1}^{h_2-1}(1-b_ju^2+q_1q_2u^4) \end{array} \right\}^{-1}.$$

§3　<u>主結果（第3の表示）</u>

§2 の結果を証明する。それは $Z_X(u)$ を更に一般化して これに新しい有限型の表示を与えることから導かれる。まず，次のことに注意する．X の基本群を $\pi_1(X, P_0) = \Gamma$ とおく（$P_0\in VX$ は fixed）。以下，簡単のため $X=$ 連結 とする。Γ の各元 γ は P_0 を始点とする proper path C_γ で代表される。この時，Γ の元の共役類には X 上の closed path の free homotopy class が対応し，従って C_γ の reduced part C_γ^* が（unique に）対応する。更に primitive な共役類

には，primitive な（i.e. 重複のない）reduced cycle が対応する。但し cycle = reduced path に於て始点を忘れ去ったもの。他方，各 $e_i = \{y_i, \bar{y}_i\} \in \underline{E}X$ に対して変数 u_i を与えておく。$\rho : \Gamma \longrightarrow U(n)$ を基本群の n 次ユニタリ表現とするとき，$\mathbf{u} = (u_1, \cdots, u_m)$ と略記して

$$Z_X(\mathbf{u};\rho) := \prod_{\{\gamma\}_\Gamma : \text{primitive}} \det\left[I_n - \rho(\gamma)\,\mathbf{u}^{\gamma}\right]^{-1} \qquad \gamma$$

$$\Updownarrow$$

$$= \prod_{[C] : \text{primitive cycle}} \det\left[I_n - \rho(\langle C\rangle)\,\mathbf{u}^{C}\right]^{-1} \qquad \langle C\rangle$$

但し，$\{\gamma\}_\Gamma$ が reduced cycle $[C] = C$ の class で代表されるとき，$\mathbf{u}^{\gamma} = \mathbf{u}^{C} = u_{i_1} u_{i_2} \cdots u_{i_\ell} \Leftrightarrow C = (y_{i_1} y_{i_2} \cdots y_{i_\ell})$。

上式の log を取って Euler の作用素を apply すると容易に次式を得る：

$$\sum_{j=1}^{m} u_j \frac{\partial}{\partial u_j} \log Z_X(\mathbf{u};\rho) = \sum_{\ell=1}^{\infty} N_{\ell,\rho}(\mathbf{u})$$

$$N_{\ell,\rho}(\mathbf{u}) := \sum_{C \in \mathcal{C}_\ell^{\mathrm{red}}(X)} \mathrm{tr}\,\rho(\langle C\rangle)\,\mathbf{u}^{C}$$

これより $\rho = \mathbb{1}$，$u_1 = \cdots = u_m = 1$ とすると

$$N_{\ell,\mathbb{1}}(1,\cdots,1) = \#(\mathcal{C}_\ell^{\mathrm{red}}(X)) = N_\ell$$

となり，$Z_X(u,\cdots,u;\mathbb{1}) = Z_X(u)$（§2 のもの）となる。

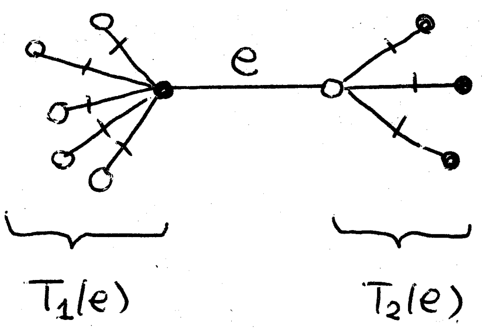
ここで，まず次の仮定をおく： $X=$ 2部グラフ $VX = V_1 \sqcup V_2$

更に，$\tilde{X}$ を X の universal covering とする。$\tilde{X}$ は（無限）tree で，X から induce された 2部グラフ構造をもつ：

$V\tilde{X} = \tilde{V}_1 \sqcup \tilde{V}_2$。 $e \in \underline{E}\tilde{X}$ に対して $\tilde{E}_i(e) = \{ e$ と同じ $\tilde{V}_i$ の頂点から出る辺の全体$\}$ とおく。

__定義__ $T_i \in \mathrm{End}(\mathbb{Z}[E\tilde{X}])$ ：$E\tilde{X}$ の上の correspondence を次の様に定める：

$$T_i(e) := \sum_{e' \in E_i(e) \setminus \{e\}} e'$$



この様に定めると，積 $T_1 \circ T_2$ 及び $T_2 \circ T_1$ は $\tilde{X}$ 上で（従って X 上で）互いに逆方向の backtracking のない smooth な長れを定めることがわかる。次に

$$M_\rho := \{ f : \underline{E}\tilde{X} \longrightarrow \mathbb{C}^n ; \ \underset{\forall \gamma \in \Gamma}{f(e\gamma) = f(e)\rho(\gamma)} \}$$

とおく。これは nm 次元の vector space で自然な形の Γ-不変な内積をもつ。$A = \mathbb{C}[u]$ として，$M_\rho \otimes_{\mathbb{C}} A$ を $\underline{E}\tilde{X}$ 上の A^n-値関数の空間と同一視する。$M_\rho \otimes A$ の作用素 $\rho_u^*(T_i)$，$i=1,2$ を

$$\rho_u^*(T_i)f(e) := \sum_{e' \in E_i(e)} f(e')\, u^{e'}$$

で定める。この時，次の等式が成立する（T_1，T_2 を有限体上の Curve の Frobenius 写像の類似とみると，これは合同関係式に相当する）。$\rho_u^*(T_i) \in End_A(M_\rho \otimes A)$ であって

<u>Key lemma</u> $\quad tr\left(\rho_u^*(T_1)\rho_u^*(T_2)\right)^\ell + tr\left(\rho_u^*(T_2)\rho_u^*(T_1)\right)^\ell = N_{2\ell,\rho}(u)$

証明は初等的に出来る。これより直ちに次の結果が導かれる：

<u>定理 3</u> $\quad X$ が連結 2 部グラフの時

$$Z_X(u;\rho) = \det\left[I_{nm} - \rho_u^*(T_1)\rho_u^*(T_2)\right]^{-1}$$

特に，$(u_1 = u_2 = \cdots = u$ として$)$

$$Z_X(u;\rho) = \det\left[I_{nm} - \rho^*(T_1T_2)u^2\right]^{-1}$$

（注−3） 1) $u = (u, \cdots, u)$ の場合，$\rho^* : \mathbb{C}[T_1, T_2] \longrightarrow End_{\mathbb{C}}(M_\rho)$ は（反）表現となることがわかる。

2) $X \neq$ 2 部グラフの時は，X の重心分割 $X^{(2)}$ を取れば 2 部グラフとなり，しかも Zeta 函数は本質的には何も変らない!! よって一般の場合は

$$Z_X(u_1^2, \cdots, u_m^2; \rho) = Z_{X^{(2)}}(u_1, u_1, u_2, u_2, \cdots, u_m, u_m; \rho)$$

により 定理3 に帰する。

3) §2 の 定理2, 2*, 2** は 定理3 から導かれる。

(1−u) の重複度については少し立入った議論が必要だが,

定理2 の 2) は次の如く示される: $\rho = \mathbb{1}$ とする.

$$EX = \bigsqcup_{P \in V_1} E(P) = \bigsqcup_{Q \in V_2} E(Q)$$ と分解する。

ここで $E(P) = \{ P$ より出る辺の全体$\}$ 等。この分解は各々

T_1, T_2 により stable である。即ち, $E(P)$ の生成する

free $\mathbb{Z}$-module は T_1-stable で, その上では

$$T_1|E(P) \cong \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{g(P)+1}$$

固有値は
$$\begin{cases} g(P) & \cdots 1 \text{ 個} \\ -1 & \cdots g(P) \text{ 個} \end{cases}$$

従って $$\det T_1|E(P) = g(P)\cdot(-1)^{g(P)}$$

$$\therefore \det T_1 = \det \rho^*(T_1) = \left(\prod_{P\in V_1} g(P)\right)\cdot(-1)^{\sum k(P) - \#V_1}$$

$$= \left(\prod_{P\in V_1} g(P)\right)\cdot(-1)^{\#EX - \#V_1}$$

T_2 についても同様であるから合せて

$$\det T_1T_2 = \prod_{j=1}^{2m} \alpha_j = g_1 \cdots g_h \cdot (-1)^h \qquad h = \#VX$$

§4. 応用 —— $L^2(G/\Gamma)$ の分解と $Z_\Gamma(u)$

定理3より $Z_X(u;\rho)=Z_\Gamma(u;\rho)$ の性質は全て，(反)表現 $\rho^*: \mathbb{C}[T_1,T_2] \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(M_\rho)$ を調べることにより得られることになる。但し，一般のグラフでは環 $\mathbb{C}[T_1,T_2]$ は勿論非可換ではなはだ複雑な構造を持ち，統一的な性質を導くのは容易でない。ここでは，X が半正則である場合を論じる。Xの価を (q_1+1, q_2+1) $q_1 \geqq q_2 > 1$ とする。この時，

$$\mathbb{C}[T_1,T_2] = \sum_{\substack{(i_1,\cdots,i_\ell)\\ i_k \neq i_{k+1}}} \mathbb{C}\cdot T_{i_1}T_{i_2}\cdots T_{i_\ell} \qquad (\text{直和})$$

であって，各 T_i は $\quad T_i^2=(q_i-1)T_i+q_i \quad (i=1,2)$ をみたす。これは，p-進代数群の時は良く知られている，岩堀部分群 B の Hecke 環 $\mathcal{H}(G,B)$ と一致する（$T_i=Bs_iB$）。次の事実も良く知られているが，直接証明も容易である：

<u>命題</u> X=半正則で価$=(q_1+1, q_2+1)$とすると，$\mathbb{C}[T_1,T_2]$ の既約表現は高々2次に限る。それらは次の通りに分類され，T_1T_2 の特性多項式 $P_\varphi(u):=\det[I-\varphi(T_1T_2)u]$ で parametrize される：

(1) 1次表現（4つ）

空間	$\varphi(T_1)$	$\varphi(T_2)$	$\varphi(T_1T_2)$	$P_\varphi(u)$
$W(q_1,q_2)$	q_1	q_2	q_1q_2	$1-q_1q_2u$
$W(q_1,-1)$	q_1	-1	$-q_1$	$1+q_1u$
$W(-1,q_2)$	-1	q_2	$-q_2$	$1+q_2u$
$W(-1,-1)$	-1	-1	1	$1-u$

(2) 2次元　パラメータ : $c\in\mathbb{C}\setminus\{0,(q_1+1)(q_2+1)\}$

$$W(c)\quad \begin{pmatrix} q_1 & 0 \\ c & -1\end{pmatrix}\quad \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & q_2\end{pmatrix}\quad \begin{pmatrix} -q_1 & q_1 \\ -c & c-q_2\end{pmatrix}\quad \begin{array}{l}1-(c-q_1-q_2)u \\ \quad +q_1q_2u^2\end{array}$$

以下, §1 の情況に戻る。即ち G は p-進体 K 上の s.s. alg gp で K-rank $=1$ とし, Tits system (G,B,N,S) をもつとする。この時, (π,V) を G の smooth な既約表現とするとき, V は Hecke 環 $\mathcal{H}(G)$ 上の non-deg. な module となり, 逆も成立する。更に $(\pi,V)=$ admissible $\Longleftrightarrow$ $\pi(f)=$ of finite rank $(\forall f\in\mathcal{H}(G))$ 。さて, $\mathbb{K}\subset G$ を open compact subgroup とすると $V^{\mathbb{K}}=\{v\in V;\ \pi(k)v=v\ \forall k\in\mathbb{K}\}$ は有限次元の $\mathbb{C}$-space で, $(\pi,V^{\mathbb{K}})$ は $\mathcal{H}(G,\mathbb{K})$-module となる。$\mathbb{K}=B$ に対しては次のことが知られている (K-rank $=1$ の仮定は不要)。

<u>定理 (A. Borel, [Bo])</u>　対応 $(\pi,V)\longrightarrow(\pi,V^B)$ は G の既約 admissible 表現 から 有限次元既約 $\mathcal{H}(G,B)$-

module への exact functor を与える。

(π, H) を G の Hilbert 空間 H での unitary 表現とすると $V = H_\infty = \{$smooth vectors in $H\}$ は G の admissible な表現空間となる。以上の事柄と定理3とを組合せると $L^2(G/\Gamma)$ の分解と Zeta 函数 $Z_\Gamma(u)$ の関係が明快に述べられる：

<u>定理4</u>　(π, H) が G の既約ユニタリ表現で、$H_\infty^B \neq \{0\}$ とする。この時、

$L^2(G/\Gamma)$ に於る (π, H) の重複度

$= Z_\Gamma(u)^{-1}$ に於る $P_\pi(u) := \det\left[I - \left(\pi(h_1 h_2) \middle| H_\infty^B\right) u\right]$ の重複度

特に、$P_\pi(u) = (1-u)$ の場合が G の Steinberg 表現であるから、Garland の結果を用いずに §1 の結果が再度得られたことになる。

(注-4) 上記の結果と Hecke 環 $\mathcal{H}(G, B)$ 及び $\mathcal{H}(G, U_1)$ $\mathcal{H}(G, U_2)$ の関係を少し丁寧にみれば §1 の問題②(定理1の非対称性)の解答が得られる。更に定理3 ⟹ 定理1 という新証明も得られる。

§5 群とグラフとHecke環

最後に、$\Gamma \subset G$ に対して以上の結果が適用される様な群 G の category 的な特徴付けについて考察する。まず、次の様な群 G とその上の函数 $\ell : G \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ の pair を考えよう。

公理 I　$\forall \ell \geq 0$ に対して $G_\ell := \{x \in G \,;\, \ell(x) = \ell\} \neq \phi$

更に $G_0 = U$ は G の部分群で、$G_\ell = G_\ell^{-1} = U G_\ell U$

が成立し、$\#(U \backslash G_\ell) < \infty$.

この時、G は U の commensurator と一致するので Hecke 環 $\mathcal{H}(G, U)$ が考えられるが、これについて

公理 II　$\exists q_1, q_2 \in \mathbb{N}$ s.t.

$$\begin{cases} G_1^2 = G_2 + (q_2 - 1) G_1 + q_2(1+q_1) U \\ G_1 G_\ell = G_{\ell+1} + (q_2 - 1) G_\ell + q_1 q_2 G_{\ell-1} \quad (\ell \geq 2) \end{cases}$$

これから直ちにわかること：$\#(U \backslash G_1) = q_2(1+q_1)$，更に $\#(U \backslash G_\ell) = (q_1 q_2)^{\ell-1} q_2 (1+q_1)$。また $\mathcal{H}(G, U)$ の中で $\sum_{\ell=0}^{\infty} \mathbb{C} \cdot G_\ell = \mathbb{C}[G_1]$ は部分環をなし，公理 II は次の等式と同値である：$\mathbb{C}[G_1][[u]]$ の中で

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} G_\ell \cdot u^\ell = \frac{(1-u)(1+q_2 u)}{1 - (G_1 - q_2 + 1)u + q_1 q_2 u^2}$$

従って，公理I-II をみたす (G, ℓ) に対して [H-H 1,2] の議論がそのまま適用できるので，$\Gamma \subset G$ 部分群で

i) Γ = torsion free　ii) $\Gamma \cap x^{-1} U x = \{1\}$ $\forall x \in G$

iii) $\#(U \backslash G / \Gamma) = h < \infty$

なるものに対して $Z_\Gamma(u;s)$ が定義され，定理1が成立する。公理I, II をみたす群 G の例として

1°) $\mathfrak{p}$-adic groups of K-rank 1

2°) $G = \mathrm{Aut}(\tilde{X}(q_1, q_2))$　$\tilde{X}(q_1, q_2)$:= 半正則2部tree で価が (q_1+1, q_2+1)

3°) $G (= \Gamma)$ = free group of finite rank

しかし，このままでは (G, ℓ) の全体がどの位大きなものか不明である。次の結果（特に (3)）は，それが非常に大きいことを示す：

<u>定理5</u>　次の3つの category は同値である

(1) $\{(G, \ell)$; 公理I, II をみたす$\}$

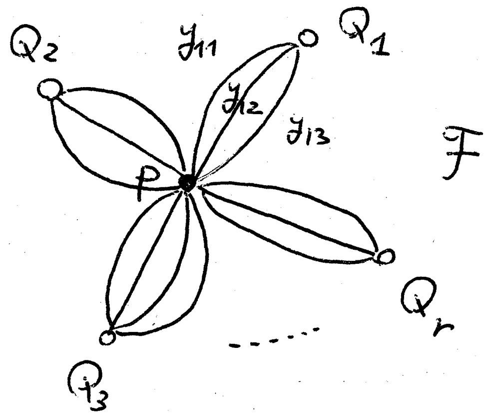
(2) $\{G$ と $\tilde{X}(q_1, q_2)$ への作用で，$\tilde{V}_1$ 上可移なもの$\}$

(3) $\{\pi_1(\mathbb{G}, \mathcal{F}, T)$; flower $\mathcal{F}$ の上の群の graph $\mathbb{G}$ の max. subtree T に関する基本群 + 半正則条件$\}$

ここで，flower $\mathcal{F}$ とは下図の様な有限グラフで $\mathbb{G}$ はその各頂点，辺に群を対応させる assignment であり

$G_y \hookrightarrow G_{o(y)}$, $G_y \hookrightarrow G_{t(y)}$, $G_y \cong G_{\bar{y}}$ なる条件をみたす。更に半正則条件

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{t_i} [G_{Q_i} : G_{y_{ij}}] = g_2 + 1 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{t_i} [G_P : G_{\bar{y}_{ij}}] = g_1 + 1 \end{cases}$$



をみたすとする。これに対する基本群 $\pi_1(\mathcal{G}, \mathcal{F}, T)$ とは

G_P, G_{Q_i} $(1 \le i \le r)$, と記号 g_y $(y \in E\mathcal{F})$

で生成され、関係式

$$\begin{cases} g_y^{-1} a^y g_y = a^{\bar{y}}, \quad g_{\bar{y}} = g_y^{-1} & ({}^\forall y \in E\mathcal{F},\ {}^\forall a \in G_y) \\ g_y = 1 \quad {}^\forall y \in ET & \end{cases}$$

$$a \longrightarrow a^y \in G_{o(y)}$$
$$a \longrightarrow a^{\bar{y}} \in G_{t(y)}$$

で定まる群のことである。これは Serre [Ser] による。

特に、$G_P, {}^\forall G_Q = \{1\}$ とすると普遍の基本群と一致する。

(注-5) 上記定理の (2) に於て、

G が $\widetilde{EX}(g_1, g_2)$ 上可移 $\Longleftrightarrow$ $G = U_1 *_B U_2$ (融合積)

$U = U_1 = Stab(P)$, $U_2 = Stab(Q)$

P ●——○ Q

さらに、$V(P;\ell) = \{Q \in VX \,;\, d(Q,P) = キョリ = \ell\}$ と

おくと，これは $\#(V(P;1)/\mho)=1$ とも同値である。
より一般に次のことが示される：

<u>定理6</u>　G は定理5のものとするとき，

G は Tits system をもつ s.t. $B=\mho_1\cap\mho_2$
$\Longleftrightarrow$ $\mathcal{H}(G,B)=\mathbb{C}[T_1,T_2]$
$\Longleftrightarrow$ $\#(\mho\backslash G_\ell/\mho)=1$　$(\forall \ell\in\mathbb{N})$
$\Longleftrightarrow$ $\mho$ の $V(P;\ell)$ への作用が可移 $(\forall \ell\in\mathbb{N})$

Tits system を持たない群 (G,ℓ) の例もたくさん存在する。

———————— 以上の結果は [H-H2],[Has] に出る予定です。詳しい証明等はこれを参照して下さい。

** References **

[Bo] A. Borel : Admissible representations of a s.s. Group over a local field with vectors fixed under Iwahori subgroup, Inv math. 35 (1976) 233-259

[Ga] H. Garland ; P-adic curvature and the cohomology of discrete subgroups of p-adic groups Ann. of Math 97 (1973) 375-423

[H-H 1] K. Hashimoto & A. Hori ; p進 discrete 群の Ihara-Selberg 型 ゼータ函数 数理解析研 講究録 617, 176-192

[H-H 2] —— ; Selberg-Ihara's Zetafunction for p-adic discrete groups, Adv. Study in Pure Math. Vol 15

[Has] K. Hashimoto ; Zetafunctions of finite graphs and representations of p-adic groups, Adv. Study in Pure Math. Vol 15.

[Ih-1] Y. Ihara ; On discrete subgroups of the two by two projective linear group over p-adic fields J. Math. Soc Japan 18 (1966) 219-235

[Ih-2] —— ; Discrete subgroup of PL(2, $k_\wp$), Proc. Symp. Pure Math. IX AMS 1966, 272-278.

[Ser] J-P. Serre : Arbres, Amalgames, SL_2, Asterisque no 46, Soc. Math. France 1977

[Su-1] T. Sunada ; L-functions in geometry and some applications, SLN 1201 266-284

[Su-2] —— ; Twisted Peron-Frobenius Theorem and L-functions, J. Funct. Analysis 71 (1987) 1-46